ゲームの数理 13
戦略形協力ゲーム

高橋里司
情報数理工学プログラム

2019 年 7 月 16 日

国立大学法人
電気通信大学
Unique & Exciting Campus

講義スケジュール

後半パート

後半パートは，NTU ゲームや戦略形ゲーム，応用について解説する．

- 6 月 4 日：NTU ゲーム 1：コア, 仁
- 6 月 11 日：NTU ゲーム 2：シャープレイ値
- 6 月 18 日：NTU ゲーム 3：コアの存在証明
- 6 月 25 日：整合性公理 1
- 7 月 2 日：整合性公理 2
- 7 月 9 日：休講
- 7 月 16 日：戦略形協力ゲーム 1：ナッシュ均衡
- 7 月 23 日：戦略形協力ゲーム 2：コア，自己拘束的戦略
- 7 月 30 日：まとめ

戦略形ゲーム

囚人のジレンマ

2 人の囚人 A, B に対して司法取引を持ちかける.

- 2 人とも黙秘した場合，懲役 2 年
- 2 人とも自白した場合，懲役 5 年
- 片方だけ自白した場合，自白した方は釈放，もう一方は懲役 10 年

	B 黙秘	B 自白
A 黙秘	(-2,-2)	(-10,0)
A 自白	(0,-10)	(-5,-5)

2 人の囚人はそれぞれ "黙秘" と "自白" という純粋戦略を持ち，表のような利得を持つ．戦略形ゲームとは，プレイヤー集合，純粋戦略集合，利得関数からなるゲームである.
一般的に，プレイヤー同士はそれぞれの利得を最大化するように利己的に振る舞う.

戦略形ゲーム

- 戦略形ゲームは非協力ゲームのモデルの１つ.
- このパートでは，戦略形の協力ゲームを考える.
- $G = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$ で表される.
  - N はプレイヤーの有限集合
  - X_i はプレイヤー i の純粋戦略 -コンパクト凸集合-
  - u_i はプレイヤー i の利得関数 -連続関数-
- 任意の $S \subseteq N$ に対して，$X_S = \prod_{i \in S} X_i$ と定義し，$X = X_N$ とおく.

戦略形ゲーム

- 提携を許す戦略形ゲームを考察する.
- 提携内でどのような合意がなされ，どのような戦略が解として成立しうるのか,
- 提携が形成されないのはどのような場合か，などについて分析できる.
- 今回の講義では，強ナッシュ均衡について解説する.

ナッシュ均衡

- 戦略形ゲームにおけるナッシュ均衡について定義する.
- 任意の戦略 $\boldsymbol{x} \in X$ に対して，あるプレイヤー i だけが異なる戦略 $\tilde{x}_i \in X_i$ に変更した戦略の組を $(\tilde{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i})$ と書く.
- 戦略の組 $\boldsymbol{x}^*$ がナッシュ均衡であるとは,

$$\forall i \in N, \forall \tilde{x}_i \in X_i, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^*) \geq \boldsymbol{u}(\tilde{x}_i, \boldsymbol{x}^*_{-i})$$

を満たすことである.

強ナッシュ均衡

- 任意の戦略の組 $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{y} \in X$, および任意の提携 $T \subseteq N$ について,
- $(\boldsymbol{x}_T, \boldsymbol{y}_{N \setminus T})$ で, T のプレイヤー i は x_i, $N \setminus T$ のプレイヤー j は y_j を選んでいる戦略の組を表している.
- $T = N$ のとき, $(\boldsymbol{x}_T, \boldsymbol{y}_{N \setminus T}) = \boldsymbol{x}$ とし,
- $T = \emptyset$ のとき, $(\boldsymbol{x}_T, \boldsymbol{y}_{N \setminus T}) = \boldsymbol{y}$ とする.

定義 1

$\boldsymbol{x} \in X$ を戦略の組, $S \subseteq N$ を提携とする. このとき, S が $\boldsymbol{x}$ において離反戦略 $\boldsymbol{y}_S \in X_S$ を持つとは,

$$\boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{y}_S, \boldsymbol{x}_{N \setminus S}) > \boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{x})$$

であることをいう.
ただし, $\boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{x}) = (u_i(\boldsymbol{x}))_{i \in S}$.

強ナッシュ均衡

- 提携が離反を企てる場合，提携内での合意が必要であるが，離反戦略はそれを前提としていることに注意する．
- 離反戦略を用いて，戦略の均衡を定義する．

定義 2

戦略の組 $\boldsymbol{x} \in X$ が強ナッシュ均衡であるとは，いかなる提携 $S \subseteq N$ も $\boldsymbol{x}$ において離反戦略をもたないことをいう．

強ナッシュ均衡

定義 3

戦略の組 $\boldsymbol{x}$ が与える利得ベクトル $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ に対し,

$$\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x}') > \boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x})$$

となる戦略 $\boldsymbol{x}'$ が存在しないとき，$\boldsymbol{x}$ は弱パレート最適であるという.

- 戦略の組が弱パレート最適でなければ，提携 N が離反戦略をもつので，強ナッシュ均衡は弱パレート最適である.
- 強ナッシュ均衡は，容易に存在するわけではない.
- 強ナッシュ均衡に言及するゲームを 3 つ取り上げる.

公共財の自発的費用分担

- 次のような公共財供給ゲーム G を考える.
- 各プレイヤー $i \in N$ の戦略 $x_i \in X_i := [0, m_i]$ は公共財への自発的費用負担額.
- 利得は次のように定義する．ただし，v_i は連続かつ単調増加関数である.

$$u_i(\boldsymbol{x}) = v_i\left(\sum_{j \in N} x_j, m_i - x_i\right)$$

- 自分の費用負担を固定したとき，他のプレイヤーの負担額の増加に伴って公共財供給量が増加し，利得が増加する.
- 次の命題が成立する.

公共財の自発的費用分担

命題 1

戦略の組 $\boldsymbol{x}^*$ はナッシュ均衡であるとする．このとき，すべての $i \in N$ について，$x_i^* = m_i$ ならば，$\boldsymbol{x}^*$ は強ナッシュ均衡である．

- この命題は，強ナッシュ均衡の十分条件を与えているが，この条件が成立するのは例外的なケースである．
- すべてのプレイヤーが予算のすべてを公共財に費やしているケースがナッシュ均衡であるとは考えにくい．

補題 2

戦略の組 $\boldsymbol{x}^* \in X$ をナッシュ均衡とし，ある $i \in N$ について，
$u_i(\boldsymbol{x}) > u_i(\boldsymbol{x}^*)$ となる $\boldsymbol{x} \in X$ が存在するとする．すると，
$\sum_{j \neq i} x_j > \sum_{j \neq i} x_j^*$ である．

証明.

- $\sum_{j \neq i} x_j \leq \sum_{j \neq i} x_j^*$ と仮定する.
- 効用関数の単調性から,

$$
\begin{aligned}
v_i\left(\sum_{j \neq i} x_j^* + x_i, m_i - x_i\right) &\geq v_i\left(\sum_{j \neq i} x_j + x_i, m_i - x_i\right) \\
&> v_i\left(\sum_{j \in N} x_j^*, m_i - x_i^*\right)
\end{aligned}
$$

- これは，$\boldsymbol{x}^*$ がナッシュ均衡であることに反する.

□

命題 1 の証明

証明.

- 戦略の組 $\boldsymbol{x}^*$ が強ナッシュ均衡ではないとする.
- ある提携 $S \subseteq N$, $|S| > 1$ と，戦略 $\boldsymbol{x}_S \in X_S$ が存在して，$\boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{x}^*_{N \setminus S}) > \boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{x}^*)$ となる.
- $\bar{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{x}^*_{N \setminus S}) \in X$ とし，任意の $i \in N$ をとれば，補題より，

$$
\begin{aligned}
\sum_{j \neq i} \bar{x}_j &= \sum_{j \notin S} x_j^* + \sum_{j \in S \setminus \{i\}} x_j \\
&> \sum_{j \neq i} x_j^* = \sum_{j \notin S} x_j^* + \sum_{j \in S \setminus \{i\}} x_j^*
\end{aligned}
$$

- ゆえに，$\sum_{j \in S \setminus \{i\}} x_j > \sum_{j \in S \setminus \{i\}} x_j^* = \sum_{j \in S \setminus \{i\}} m_j$ となるが，
- $\boldsymbol{x}_S \in X_S$ であるから，これは不可能である.

□

純粋交換ゲーム

- 純粋交換経済 $\mathcal{E}$ 上の戦略形ゲームを考える.
- 純粋交換経済は第 8 回の資料を参照.
- 各プレイヤー $i \in N$ は $\boldsymbol{w}_i = (w_i^1, \cdots, w_i^m) \in \mathbb{R}_+^m$ で表す財ベクトルを持っている.
- 提携 $S \subset N$ が形成されれば, S 内で交換しあうことにより, 各メンバー $i \in S$ は, 配分 $\boldsymbol{y}_i = (y_i^1, \cdots, y_i^m) \in \mathbb{R}_+^m$ を達成することができる.
- ただし, $\boldsymbol{y}_i$ は
$$\sum_{i \in S} y_i^h = \sum_{i \in S} w_i^h, \ h = 1, \cdots, m$$
を満たす.
- つまり, 配分 $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n) \in \mathbb{R}_+^{nm}$ は S-配分になる.
- 利得は, S-配分 $\boldsymbol{y}$ における i への配分 $\boldsymbol{y}_i$ に対して, 連続で準凹な狭義単調増加関数 v_i によって $v_i(\boldsymbol{y}_i)$ と与える.

純粋交換ゲーム

- 純粋交換経済 $\mathcal{E}$ の上で，次のような戦略形ゲームを定義する.
- 各プレイヤー $i \in N$ に対し，戦略の集合 X_i を

$$X_i = \left\{ \boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^{nm} \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{x}_i = (\boldsymbol{x}_{i1}, \cdots \boldsymbol{x}_{in}), \boldsymbol{x}_{ij} = (x_{ij}^1, \cdots x_{ij}^m); \\ \sum_{j \in N} x_{ij}^h = w_i^h, h = 1, \cdots, m \end{array} \right\}$$

と与える.

- 戦略は，プレイヤー i が，自分の初期保有財について，誰に何をどれだけ転移するかを記述する移転ベクトルの全体である.
- 純粋交換ゲームとは，次のような N-配分を与える成果関数 g をもつ戦略形ゲーム $G = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$ である.

$$g(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \left(\sum_{j \in N} \boldsymbol{x}_{j1}, \cdots, \sum_{j \in N} \boldsymbol{x}_{jn} \right), & (\cdot) \in \mathbb{R}_+^{nm} \text{のとき}, \\ \boldsymbol{w}, & \text{そうでないとき}, \end{cases}$$

純粋交換ゲーム

- プレイヤーの利得関数 u_i は,

$$u_i(\boldsymbol{x}) = v_i(g(\boldsymbol{x})_i)$$

で与えられる．ただし，$g(\boldsymbol{x})_i$ は $g(\boldsymbol{x})$ の第 i 成分である.

- 先に定義した成果関数は常に N-配分を与える．なぜなら,

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \boldsymbol{x}_{ji} = \sum_{j \in N} \sum_{i \in N} \boldsymbol{x}_{ji} = \sum_{j \in N} \boldsymbol{w}_j$$

だから.

純粋交換ゲームの強ナッシュ均衡

命題 3

- 純粋交換ゲーム G において，すべての $i \in N$ について $X_i \subseteq R_+^{nm}$ と仮定する．

このとき，$\boldsymbol{x}_{ii}^* = \boldsymbol{w}_i$ $(i \in N)$ を満たす戦略の組 $\boldsymbol{x}^*$ が強ナッシュ均衡であるためには，$\boldsymbol{x}^*$ が弱パレート最適となっていることが必要十分である．

- この命題によって，純粋交換ゲームの強ナッシュ均衡は，初期保有の状態がすでに弱パレート最適である場合のみ．
- 効用関数の単調性より，$\boldsymbol{x}^*$ は唯一のナッシュ均衡なので，強ナッシュ均衡も存在すればただ 1 つ．
- 強ナッシュ均衡によっては，財の交換が決して行われないこともある．

規制強ナッシュ均衡

- 純粋交換経済におけるコア $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ は，いかなる提携 S によっても改善されない N-配分の全体である．
- すなわち
$$v_i(\boldsymbol{y}_i) > v_i(\boldsymbol{y}_i^*)\ \forall i \in N$$
となる S-配分 $\boldsymbol{y}$ が存在しないような N-配分 $\boldsymbol{y}^*$ の集合である．
- コアと強ナッシュ均衡は一見すると類似しているが，財の交換に関しては全く異なる結果を記述する．
- 離反に一定の規制を課すことにより，コアに属する配分およびそれだけを均衡戦略によって実現することができる．

許容離反

- 負の移転も許す純粋交換ゲーム G を考え，許容離反という制限された離反を定義する．
- 任意の提携 S について，S の離反はそれが $N \setminus S$ からの移転を相殺しているものである限りにおいて許されるという規制．
- このゲームでは，どの提携も普通提携の外と財の交換をしていると考える．
- 現状から離反して提携内の利得を高めようとする以上は，外からの移転にフリーライドすることは許されない．

定義 4

任意の戦略の組 $\bar{\boldsymbol{x}} \in X$ と，任意の提携 $S \subseteq N$ が与えられたとき，

1. $\boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{x}_S, \bar{\boldsymbol{x}}_{N\setminus S}) > \boldsymbol{u}_S(\bar{\boldsymbol{x}})$
2. $\sum_{i\in S}\sum_{j\in N\setminus S} x_{ij}^h = \sum_{i\in S}\sum_{j\in N\setminus S} \bar{x}_{ji}^h,\ h = 1, \cdots, m$

を満たす $\boldsymbol{x}_S \in X_S$ を $\bar{\boldsymbol{x}}$ における S の許容離反という．

規制強ナッシュ均衡

- 戦略の組 $\boldsymbol{x}^* \in X$ において，どの提携も許容離反をもたないとき，$\boldsymbol{x}^*$ を規制強ナッシュ均衡，あるいは単に規制強均衡と呼ぶ.
- 離反が規制されているので，規制強均衡は強ナッシュ均衡よりも存在しやすくなる.

定理 4

純粋交換経済 $\mathcal{E}$ のコア $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ は，ゲーム G の規制強均衡で達成される N-配分の全体に一致する.

証明の前に，まず，次の事実を確認しておく.

補題 5

$S \subseteq N$ を任意の提携，$\tilde{\boldsymbol{x}} \in X$ を任意の戦略の組，$\boldsymbol{y} \in Y$ を任意の N-配分とする．このとき，すべての $i \in S$，$j \in N$ および，$h = 1, \cdots, m$ について，

$$x_{ij}^h = \frac{w_i^h}{\sum_{i \in S} w_i^h} \left(y_j^h - \sum_{k \in N \setminus S} \tilde{x}_{kj}^h \right)$$

と定義された $\boldsymbol{x}_S$ は次の 3 条件を満たす：

1. $\boldsymbol{x}_S \in X_S$
2. $\forall j \in N, \sum_{i \in S} x_{ij}^h = y_j^h - \sum_{k \in N \setminus S} \tilde{x}_{kj}^h, h = 1, \cdots, m,$
3. もし，$\boldsymbol{x}_S$ が $\tilde{\boldsymbol{x}} \in X$ における離反で，$\boldsymbol{y}$ が S-配分ならば，$\boldsymbol{x}_S$ は許容離反である．

証明

1. まず，$\boldsymbol{y}$ は N-配分だから，

$$\begin{aligned}\sum_{j\in N} x_{ij}^h &= \frac{w_i^h}{\sum_{i\in S} w_i^h}\left(\sum_{j\in N} y_j^h - \sum_{j\in N}\sum_{k\in N\setminus S} \tilde{x}_{kj}^h\right)\\ &= \frac{w_i^h}{\sum_{i\in S} w_i^h}\left(\sum_{i\in N} w_j^h - \sum_{i\in N\setminus S} w_i^h\right)\\ &= w_i^h,\ h=1,\cdots,m.\end{aligned}$$

2. そのまま計算すれば良い．
3. $\boldsymbol{y}$ が $N\setminus S$-配分であることを使う．

$\square$

定理 4 の証明 I

定理 6

純粋交換経済 $\mathcal{E}$ のコア $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ は，ゲーム G の規制強均衡で達成される N-配分の全体に一致する.

- 戦略の組 $\boldsymbol{x}^* \in X$ は，規制強均衡でないとする.
- ある $S \subseteq N$ は $\boldsymbol{x}^*$ において許容離反 $\boldsymbol{x}_S \in X_S$ をもつ.
- まず，配分 $g(\boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{x}^*_{N \setminus S})$ は S-配分であることを示す.
- 離反 $\boldsymbol{x}_S \in X_S$ は

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij}^h + \sum_{i \in S} \sum_{k \in N \setminus S} x_{ik}^h = \sum_{i \in S} w_i^h, \quad h = 1, \cdots, m$$

を満たす.

定理 4 の証明 II

- ところが，許容離反の定義とこの等式から，

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} x_{ij}^{h} + \sum_{i\in S}\sum_{k\in N\backslash S} x_{ik}^{h*} = \sum_{i\in S} w_i^h, \quad h = 1, \cdots, m.$$

- これは，$g(\boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{x}^*_{N\backslash S})$ が S-配分であることを意味する．
- したがって，配分 $g(\boldsymbol{x}^*)$ は S-配分 $g(\boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{x}^*_{N\backslash S})$ により改善される．
- 逆を示す．
- $\boldsymbol{y}^*$ をコアに属さない N-配分であるとする．
- ある $S \subseteq N$ について，ある S-配分 $\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{y}^*$ を改善する．

定理 4 の証明 III

- いま，$\boldsymbol{x}^* \in X$ を，$g(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{y}^*$ であるような戦略の組とし，各 $i \in S$ と $j \in N$ に対し，x_{ij}^h を

$$x_{ij}^h = \frac{w_i^h}{\sum_{i \in S} w_i^h} \left(y_j^h - \sum_{k \in N \setminus S} \tilde{x}_{kj}^{h*} \right)$$

  と定義する．
- すると，補題によって，$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^*$ とすれば，この $\boldsymbol{x}_S$ は $g(\boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{x}_{N \setminus S}^*) = \boldsymbol{y}$ を満たす S の許容離反である．
- ゆえに，戦略の組 $\boldsymbol{x}^*$ は規制強均衡ではない．

$\square$

強ナッシュ均衡

- 戦略形協力ゲームにおける強ナッシュ均衡は非常に限定的な場合にのみ存在する.
- 均衡の条件を緩めた結託耐性ナッシュ均衡などが提案されているが,次を参照してほしい.
  - B. D. Bernheim, B. Peleg, and M. D. Whinston (1987): Coalition-proof Equilibria I. Concepts. *Journal of Economic Theory*, **42**, pp.1–12.
- 次回は,戦略形協力ゲームにおけるコアに相当する α-コア,β-コアを紹介する.