ゲームの数理 12
シャープレイ値の公理化

高橋里司
情報数理工学プログラム

2019 年 7 月 2 日

国立大学法人
電気通信大学
UEC TOKYO
Unique & Exciting Campus

講義スケジュール

後半パート

後半パートは，NTU ゲームや戦略形ゲーム，応用について解説する．

- 6 月 4 日：NTU ゲーム 1：コア, 仁
- 6 月 11 日：NTU ゲーム 2：シャープレイ値
- 6 月 18 日：NTU ゲーム 3：コアの存在証明
- 6 月 25 日：整合性公理 1
- 7 月 2 日：整合性公理 2
- 7 月 9 日：休講
- 7 月 16 日：戦略形協力ゲーム 1：ナッシュ均衡
- 7 月 23 日：戦略形協力ゲーム 2：コア，自己拘束的戦略
- 7 月 30 日：まとめ

シャープレイ値の公理化

シャープレイ値の公理化は次の 2 つが知られている.

- Sobolev の縮小ゲーム整合性公理による公理化
- Hart and Mas-Colell の異なるタイプの縮小ゲーム整合性公理による公理化

シャープレイ値の公理化の分析

Hart and Mas-Colell のポテンシャルアプローチを利用する.

ポテンシャル関数

定義 1

- 関数 $P:\Gamma^A\to\mathbb{R}$ において，P に対するプレイヤー $i\in N$ の限界貢献 D^iP を
$$D^iP(N,v)=P(N,v)-P(N\setminus\{i\},v)$$
と定義する.
- $(N\setminus\{i\},v)$ はゲーム (N,v) の部分ゲームであり，$P(\emptyset,0)=0$ とする.
- P が次を満たすとき，ポテンシャル関数という.
$$\sum_{i\in N}D^iP(N,v)=v(N).$$

シャープレイ値のポテンシャル

補題 1

ポテンシャル関数は，次で与えられる．

$$P(N,v)=\sum_{S\subseteq N}\frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}v(S).$$

証明

- ポテンシャルの条件式に限界貢献度の定義式を代入すると，

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N}D^iP(N,v) &= \sum_{i\in N}(P(N,v)-P(N\setminus\{i\},v))\\ &= |N|P(N,v)-\sum_{i\in N}P(N\setminus\{i\},v)=v(N)\\ P(N,v) &= \frac{1}{|N|}\left(v(N)+\sum_{i\in N}P(N\setminus\{i\},v)\right)\end{aligned}$$

証明

- $P(\emptyset, v) = 0$ から，すべての部分集合 $S \subseteq N$ について，(S, v) に対するポテンシャルが決定される．
- これが補題の式を満たすことを帰納法で証明する．
- $|N| = 1$ のとき，$P(N, v) = v(N) + P(\emptyset, v) = v(N)$ より満たす．
- $i \in N$ に対し，$(N \setminus \{i\}, v)$ が補題を満たすと仮定する．

証明

$$
\begin{aligned}
P(N,v) &= \frac{1}{|N|}\left(v(N)+\sum_{i\in N} P(N\setminus\{i\},v)\right)\\
&= \frac{1}{|N|}\left(v(N)+\sum_{i\in N}\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \frac{(|S|-1)!(|N|-1-|S|)!}{(|N|-1)!}v(S)\right)\\
&= \frac{1}{|N|}\left(v(N)+\sum_{S\subset N}\sum_{i\in N\setminus S} \frac{(|S|-1)!(|N|-1-|S|)!}{(|N|-1)!}v(S)\right)\\
&= \frac{1}{|N|}v(N)+\sum_{S\subset N}\frac{(|S|-1)!(|N|-1-|S|)!(|N|-|S|)}{(|N|-1)!|N|}v(S)\\
&= \sum_{S\subseteq N}\frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}v(S)
\end{aligned}
$$

$\square$

限界貢献度とシャープレイ値の関係

定理 2

プレイヤー i のシャープレイ値 $\phi_i(N, v)$ に対し,

$$D^i P(N, v) = \phi_i(N, v)$$

が成り立つ.

証明の概要

ゲームの数理 6 のシャープレイ値の公理化の議論から導かれる.

シャープレイ値のもつ対称性

- ポテンシャル関数を用いると，シャープレイ値のもつ対称性を示すことができる.
- 元のゲームからあるプレイヤー j が退出したときのプレイヤー i に対する影響は,
- 元のゲームからあるプレイヤー i が退出したときのプレイヤー j に対する影響と等しい.
- ゲームからプレイヤーが退出するときの他のプレイヤーに対する影響は互いに対称.

定理 3

任意のプレイヤー $i, j \in N$ $(i \neq j)$ に対し,

$$\phi_i(N, v) - \phi_i(N \setminus \{j\}, v) = \phi_j(N, v) - \phi_j(N \setminus \{i\}, v)$$

が成り立つ.

証明.

- シャープレイ値とポテンシャル関数との関係から,

$$\begin{aligned}\phi_i(N,v)-\phi_i(N\setminus\{j\},v) &= (P(N,v)-P(N\setminus\{i\},v)) \\ &\quad -(P(N\setminus\{j\},v)-P(N\setminus\{i,j\},v)) \\ &= P(N,v)-P(N\setminus\{i\},v)-P(N\setminus\{j\},v) \\ &\quad +P(N\setminus\{i,j\},v)\end{aligned}$$

- 同様に,

$$\begin{aligned}&\phi_j(N,v)-\phi_j(N\setminus\{i\},v) \\ &= P(N,v)-P(N\setminus\{i\},v)-P(N\setminus\{j\},v)+P(N\setminus\{i,j\},v)\end{aligned}$$

- 従って, 両辺は一致する.

縮小ゲーム

- 前回定義した縮小ゲームをもう少し精緻化する.

定義 2 (プロジェクション縮小ゲーム)

ゲーム (N, v) と利得ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ からなる縮小ゲーム $(S, v^{\boldsymbol{x}})$ がプロジェクション縮小ゲームであるとは,

$$v^{\boldsymbol{x}}(S) = v(N) - \sum_{j \in N \setminus S} x_j,$$

$$\forall T \subset S, \;\; v^{\boldsymbol{x}}(T) = v(T)$$

で与えられることをいう.

縮小ゲーム

定義 3 (コンプリメント縮小ゲーム)

ゲーム (N, v) と利得ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ からなる縮小ゲーム $(S, v^{\boldsymbol{x}})$ がコンプリメント縮小ゲームであるとは,

$$v^{\boldsymbol{x}}(T) = v(T \cup (N \setminus S)) - \sum_{j \in N \setminus S} x_j, \ \forall T \subseteq S, \ T \neq \emptyset$$

$$v^{\boldsymbol{x}}(\emptyset) = 0$$

で与えられることをいう.

- 縮小ゲーム $(S, v^{\boldsymbol{x}})$ において，利得の再配分交渉を行う際，外部のプレイヤー $j \in N \setminus S$ は，それぞれ利得 x_j を受け取るという条件のもとで，S のいかなる部分提携 T にも協力する.

凸結合縮小ゲーム整合性

定義 4 (Sobolev の凸結合縮小ゲーム)

$j \in N$ に対し，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ のとき，縮小ゲーム $(N \setminus \{j\}, v^{\boldsymbol{x}})$ が次のように与えられるとき，縮小ゲームを凸結合縮小ゲームという.

$$\forall S \subseteq N \setminus \{j\},\ v^{\boldsymbol{x}}(S) = \frac{s}{n-1}\left(v(S \cup \{j\}) - x_j\right) + \frac{n-1-s}{n-1} v(S)$$

- ゲームを離れるプレイヤー j から協力を得る際，縮小後の全体提携に占める提携の大きさ $\frac{s}{n-1}$ の確率でコンプリメントタイプの協力が得られ，
- 残りの確率でプロジェクションタイプの協力，すなわち，協力が得られないことを表す.
- プロジェクションタイプとコンプロメントタイプの凸結合で与えられているので，このような名前で呼ばれる.

定理 4

シャープレイ値は凸結合縮小ゲーム整合性を満たす.

示すべきこと

- 縮小ゲーム $(N \setminus \{j\}, v^{\boldsymbol{x}})$ において,
- $\forall i \in N \setminus \{j\}$, $\phi_i(N \setminus \{j\}, v^{\boldsymbol{x}}) = \phi_i(N, v)$ を示せばよい.

証明.

- $j \in N, i \in N \setminus \{j\}$ とし, $\boldsymbol{x} = \phi(N, v)$ とする.
- ゲーム $(N \setminus \{j\}, v^{\boldsymbol{x}})$ と $(N \setminus \{i, j\}, v^{\boldsymbol{x}})$ のポテンシャルを計算する.
- $n = |N|$, $s = |S|$ とする.

証明.

$$
\begin{aligned}
P(N\setminus\{j\},v^{\boldsymbol{x}}) &= \sum_{S\subseteq N\setminus\{j\}} \frac{(s-1)!(n-s-1)!}{(n-1)!} v^{\boldsymbol{x}}(S) \\
&= \sum_{S\subseteq N\setminus\{j\}} \frac{(s-1)!(n-s-1)!}{(n-1)!} \left(\frac{s}{n-1} \left(v(S\cup\{j\}) - x_j \right) + \frac{n-1-s}{n-1} v(S) \right) \\
&= \sum_{S\subseteq N\setminus\{j\}} \frac{(s-1)!(n-s-1)!}{(n-1)!} \left(\frac{s}{n-1} \left(v(S\cup\{j\}) - x_j - v(S) \right) + v(S) \right) \\
&= \sum_{S\subseteq N\setminus\{j\}} \frac{s!(n-s-1)!}{(n-1)!(n-1)} (v(S\cup\{j\}) - x_j - v(S)) + \sum_{S\subseteq N\setminus\{j\}} \frac{(s-1)!(n-s-1)!}{(n-1)!} v(S) \\
&= \frac{n}{n-1} \sum_{S\subseteq N\setminus\{j\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S\cup\{j\}) - v(S)) \\
&\quad - \frac{n}{n-1} \sum_{S\subseteq N\setminus\{j\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} x_j + P(N\setminus\{j\},v) \\
&= \frac{n}{n-1}\phi_j(N,v) - \frac{n}{n-1} x_j + P(N\setminus\{j\},v) \\
&= P(N\setminus\{j\},v).
\end{aligned}
$$

ただし, $\displaystyle\sum_{S\subseteq N\setminus\{j\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} = 1$

証明.

$$
\begin{aligned}
P(N\setminus\{i,j\},v^{\mathbf{x}}) &= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}} \frac{(s-1)!(n-s-2)!}{(n-2)!} v^{\mathbf{x}}(S) \\
&= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}} \frac{(s-1)!(n-s-2)!}{(n-2)!} \left(\frac{s}{n-1}\Big(v(S\cup\{j\}) - x_j\Big) + \frac{n-1-s}{n-1} v(S) \right) \\
&= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}} \frac{(s-1)!(n-s-2)!}{(n-2)!} \left(\frac{s}{n-1}\Big(v(S\cup\{j\}) - x_j - v(S)\Big) + v(S) \right) \\
&= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}} \frac{s!(n-s-2)!}{(n-1)!} (v(S\cup\{j\}) - x_j - v(S)) + \sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}} \frac{(s-1)!(n-s-2)!}{(n-2)!} v(S) \\
&= \sum_{S\subseteq (N\setminus\{i\})\setminus\{j\}} \frac{s!(n-s-2)!}{(n-1)!} (v(S\cup\{j\}) - v(S)) \\
&\quad - \sum_{S\subseteq\{i,j\}} \frac{s!(n-s-2)!}{n!} x_j + P(N\setminus\{i,j\},v) \\
&= \phi_j(N\setminus\{i\},v) - \phi_j(N,v) + P(N\setminus\{i,j\},v) \\
&= (P(N\setminus\{i\},v) - P(N\setminus\{i,j\},v)) - (P(N,v) - P(N\setminus\{j\},v)) + P(N\setminus\{i,j\},v) \\
&= P(N\setminus\{i\},v) - P(N,v) + P(N\setminus\{j\},v)
\end{aligned}
$$

ただし, $\displaystyle\sum_{S\subseteq N\setminus\{j\}} \frac{s!(n-s-2)!}{(n-1)!} = 1$

証明.

- 2つの関係式と定理2より，

$$
\begin{aligned}
\phi_i(N\setminus\{j\}, v^{\mathbf{x}}) &= P(N\setminus\{j\}, v^{\mathbf{x}}) - P(N\setminus\{i,j\}, v^{\mathbf{x}}) \\
&= P(N\setminus\{j\}, v) \\
&\quad -(P(N\setminus\{i\}, v) - P(N, v) + P(N\setminus\{j\}, v)) \\
&= P(N, v) - P(N\setminus\{i\}, v) \\
&= \phi_i(N, v)
\end{aligned}
$$

□

シャープレイ値の公理化

定理 5

Γ^A において，シャープレイ値は全体合理性公理，一点解公理，戦略上同等な変換に関する不変性公理，対称性公理，凸結合縮小ゲーム整合性公理を満たす唯一の解である．

証明の方針

- シャープレイ値が全体合理性公理，一点解公理，戦略上同等な変換に関する不変性公理，対称性公理，凸結合縮小ゲーム整合性公理を満たすことはすでに示されている．
- 一意性を証明する．
- σ を 5 つの公理を満たす解としたとき，$\sigma = \phi$ を示す．

証明.

- $|N| = 1$ のとき，全体合理性公理より，$N = \{i\}$ に対し，$\sigma_i(N, v) = v(N) = \phi_i(N, v)$.
- $|N| = 2$ のとき，σ も ϕ も 2 人ゲームの標準解になるから両者は一致する.
- $|N| = n \geq 3$ とし，帰納法により，$\sigma(N, v) = \phi(N, v)$ を示す.
- 任意の $n - 1$ 人ゲーム (N', v)，$(|N| = n - 1, n \geq 3)$ に対して，$\sigma(N', v) = \phi(N', v)$ が成り立つと仮定する.
- $\boldsymbol{x} = \sigma(N, v)$，$\boldsymbol{y} = \phi(N, v)$ とする.
- $i, j \in N$ $(i \neq j)$ をとり，凸結合縮小ゲーム $(N \setminus \{j\}, v^{\boldsymbol{x}})$，$(N \setminus \{j\}, v^{\boldsymbol{y}})$ を考える.
- 両者が縮小ゲーム整合性公理を満たすので，

$$
\begin{aligned}
x_i - y_i &= \sigma_i(N \setminus \{j\}, v^{\boldsymbol{x}}) - \phi_i(N \setminus \{j\}, v^{\boldsymbol{y}}) \\
&= \phi_i(N \setminus \{j\}, v^{\boldsymbol{x}}) - \phi_i(N \setminus \{j\}, v^{\boldsymbol{y}}) \\
&= \phi_i(N \setminus \{j\}, v^{\boldsymbol{x}} - v^{\boldsymbol{y}}).
\end{aligned}
$$

証明.

- 凸結合縮小ゲームの定義より

$$
\begin{aligned}
(v^{\boldsymbol{x}} - v^{\boldsymbol{y}})(S) &= \frac{s}{n-1}\left(v(S \cup \{j\}) - x_j\right) + \frac{n-1-s}{n-1} v(S) \\
&\quad - \frac{s}{n-1}\left(v(S \cup \{j\}) - y_j\right) + \frac{n-1-s}{n-1} v(S) \\
&= \frac{s(-x_j + y_j)}{n-1} \; \forall S \subseteq N
\end{aligned}
$$

  が成り立つので,
- $\phi_i(N \setminus \{j\}, v^{\boldsymbol{x}} - v^{\boldsymbol{y}}) = -x_j + y_j/n - 1$ が成り立つ.
- すべての $j \in N \setminus \{i\}$ に対して, $x_i - y_i = -x_j + y_j/n - 1$ が成り立つ.

証明.

- すべての $j \in N \setminus \{i\}$ に対して，$x_i - y_i = -x_j + y_j/n-1$.
- この両辺を $j \in N \setminus \{j\}$ について足し合わせると，

$$(n-1)(x_i - y_i) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \frac{-x_j + y_j}{n-1} = \frac{-v(N) + x_i + v(N) - y_i}{n-1} = \frac{x_i - y_i}{n-1}$$

- 従って，任意の i について，

$$(n-1)(x_i - y_i) - \frac{x_i - y_i}{n-1} = \frac{(n-1)^2 + 1}{n-1}(x_i - y_i) = \frac{n(n-2)}{n-1}(x_i - y_i) = 0$$

となり，$n \geq 3$ より，$x_i = y_i$ である.

- したがって，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ すなわち，$\sigma(N, v) = \phi(N, v)$.

$\square$

σ 縮小ゲーム整合性による公理化

- Hart and Mas-Colell は別のタイプの縮小ゲームと整合性を考察した.
- (N, v) と 1 点解 $\sigma(N, v)$ を考える.
- N の一部のメンバー S からなる縮小ゲームを考えたとき,
- その縮小ゲームにおける提携 $T \subseteq S$ は必ず, ゲームを離れるメンバー $N \setminus S$ の協力を得ることができる.
- 見返りとして, $N \setminus S$ は解 $\sigma(Q, v)$, $Q = T \cup (N \setminus S)$ に基づく利得を得る.
- つまり, T がゲームを離れるメンバー $N \setminus S$ に協力を要請するとき,
- 部分ゲーム $(Q, v) = (T \cup (N \setminus S), v)$ に基づく解 $\sigma(Q, v)$ による利得を与えることで, $N \setminus S$ の協力が得られると考える.
- したがって, 残った利得 $v(Q) - \sum_{j \in N \setminus S} \sigma_j(Q, v)$ が縮小ゲームにおける提携 T の提携値となる.

σ 縮小ゲーム

定義 5 (σ 縮小ゲーム)

ゲーム (N, v) と *1* 点解 σ に対し，N のある部分集合 S ($S \neq \emptyset$) を考える．このとき，**σ 縮小ゲーム** (S, v^σ) を次のように定義する．

$$v^\sigma(T) = v(T \cup (N \setminus S)) - \sum_{j \in N \setminus S} \sigma_j(T \cup (N \setminus S), v), \ \ \forall T \subseteq S,$$

$$v^\sigma(\emptyset) = 0$$

定義 6 (σ 縮小ゲーム整合性公理)

σ をゲームの *1* 点解とする．$(N, v) \in \Gamma$ ならば，すべての $S \subset N$ に対し，

$$(S, v^\sigma) \in \Gamma, \ \sigma_i(N, v) = \sigma_i(S, v^\sigma) \ \forall i \in S.$$

シャープレイ値の σ 縮小ゲーム整合性公理による公理化

定理 6

Γ^A において，シャープレイ値 ϕ は σ 縮小ゲーム整合性公理を満たす．

証明.

- ポテンシャル関数の性質から $T \subseteq S$ に対し，

$$
\begin{aligned}
v^{\phi}(T) &= v(T \cup (N \setminus S)) - \sum_{j \in N \setminus S} \phi_j(T \cup (N \setminus S), v) \\
&= \sum_{i \in T} \phi_i(T \cup (N \setminus S)) \\
&= \sum_{i \in T} (P(T \cup (N \setminus S), v) - P((T \cup (N \setminus S) \setminus \{i\}, v)) \\
&= |T| P(T \cup (N \setminus S), v) - \sum_{i \in T} P((T \cup (N \setminus S) \setminus \{i\}, v)
\end{aligned}
$$

証明.

- このとき，$T \subseteq S$ に対し，

$$P(T, v^{\phi}) = P(T \cup (N \setminus S), v) - P(N \setminus S, v)$$

が成り立つことを $|T|$ に関する帰納法で示す．

- $T = \{i\}$ とすると，$P(\emptyset, v) = 0$ より，

$$\begin{aligned} P(\{i\}, v^{\phi}) &= \phi(\{i\}, v^{\phi}) = v^{\phi}(\{i\}) \\ &= v(\{i\} \cup (N \setminus S)) - \sum_{j \in N \setminus S} \phi_j(\{i\} \cup (N \setminus S), v) \\ &= \phi_i(\{i\} \cup (N \setminus S)) = P(\{i\} \cup (N \setminus S)) - P(N \setminus S, v) \end{aligned}$$

が成り立つ．

証明.

- $|T|-1$ 人提携 $T \setminus \{i\}$ $(i \in T)$ に対して成立すると仮定する.
- ポテンシャル関数の性質から部分ゲーム (T, v^{ϕ}) において,

$$
\begin{aligned}
v^{\phi}(T) &= \sum_{i \in T} \phi_i(T, v^{\phi}) = \sum_{i \in T} D^i P(T, v^{\phi}) \\
&= \sum_{i \in T} (P(T, v^{\phi}) - P(T \setminus \{i\}, v^{\phi})) \\
&= \sum_{i \in T} (P(T, v^{\phi}) - P((T \setminus \{i\}) \cup (N \setminus S), v) + P(N \setminus S, v)) \\
&= |T| P(T, v^{\phi}) - \sum_{i \in T} P((T \cup (N \setminus S)) \setminus \{i\}, v) + |T| P(N \setminus S,
\end{aligned}
$$

- したがって, $|T|P(T, v^{\phi}) = |T|P(T \cup (N \setminus S), v) - |T|P(N \setminus S, v)$.
- $|T|$ で両辺を割ると目的の式が得られる.

証明.

- $i \in S$ に対して,

$$\begin{aligned} \phi_i(S, v^\phi) &= P(Sv^\phi) - P(S \setminus \{i\}, v^\phi) \\ &= P(N, v) - P(N \setminus S, v) - P(N \setminus \{i\}, v) + P(N \setminus S, v) \\ &= P(N, v) - P(N \setminus \{i\}, v) = \phi_i(N, v) \end{aligned}$$

  が成り立つ.
- ゆえにシャープレイ値は σ 縮小ゲーム整合性公理を満たす.

□

定理 7

Γ^A において，シャープレイ値は全体合理性公理，一点解公理，戦略上同等な変換に関する不変性公理，対称性公理，σ 縮小ゲーム整合性公理を満たす唯一の解である.

証明は定理 5 と似ている.

協力ゲームの解の公理化

- ゲームが与えられたとき，その部分ゲームとの整合性を考えることによって，ゲームの解の公理化ができる.
- シャープレイ値に関しては，こでまで 3 つの公理化を与えたが，縮小ゲームの整合性による公理化は，他のゲームの解との違いをより際立たせるという意味で有用である.
- 次回より，戦略形協力ゲームを扱う.
- はじめに戦略形ゲームの簡単な解説を行う.